Πιθανοτητες 15/12 1

Παράδειγμα

Φοιτητής απαντά 3 ερωτήσεις Καταφατικά ή Αρνητικά. Κερδίζει μια μονάδα για κάθε σωστή και χάνει μια για κάθε λάθος.

a) Αναμενόμενος αριθμός σωστών απαντήσεων =?

β) Αναμενόμενο κέρδος φοιτητή =?

Λύση

α. Έστω τ.μ. παριστά αριθμό σωστών απαντήσεων ζητώ $E(X)$.

Έστω $E = \{$σωστή απάντηση$\}$

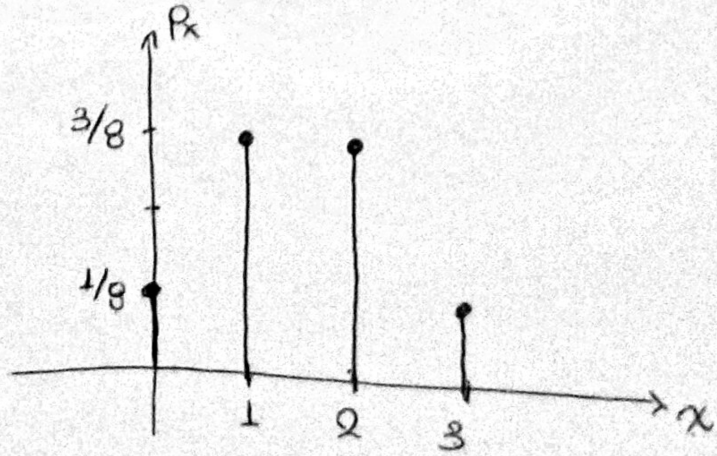
$$X \sim B\left(3,\ p = P(E) = \frac{1}{2}\right)$$

$$p_X(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-x} = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

$$p_X(0) = p_X(3) = \frac{1}{8}$$

$$p_X(1) = p_X(2) = \frac{3}{8}$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\, p_X(x) = 1{,}5$$



Β. έστω Y το κέρδος. Ζητω $E(Y)$

Τιμές $y = -3, -1, 1, 3$

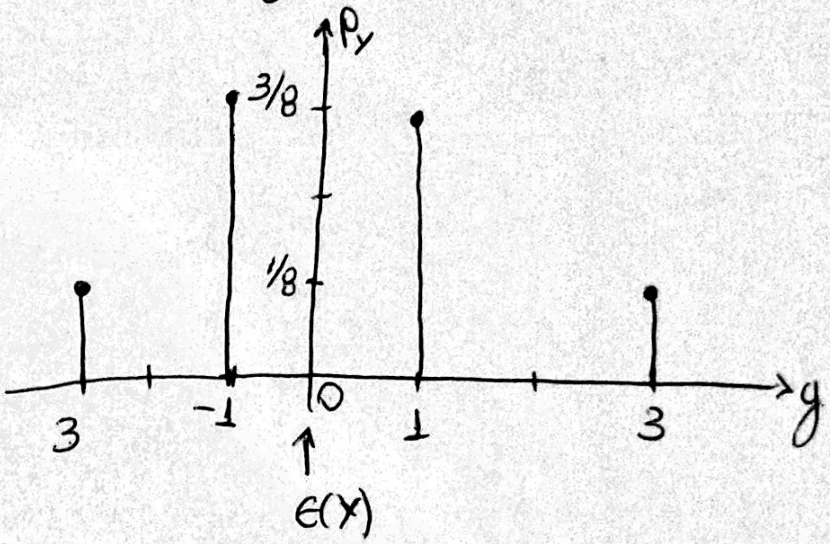
$$P_Y(-3) = P_X(0) = \frac{1}{8}$$

$$P_Y(-1) = P_X(1) = \frac{3}{8}$$

$$P_Y(1) = P_X(2) = \frac{3}{8}$$

$$P_Y(3) = P_X(3) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow E(Y) = \sum_{y=-3,-1,1,3} y\, P_Y(y) = 0$$



*

2) (Απο τα χαρακτηριστικά του προηγούμενου μαθήματος)

Διακύμανση ή Διασπορά τ.μ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω τ.μ. X με μέση τιμή $\mu = E(X)$. Η διακύμανση ή διασπορά της X συμβολίζεται με σ^2 ή $Var(X)$ και ορίζεται

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X-\mu)^2 = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^2 P_X(x) & , X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx & , X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Ερμηνεία Διακύμανσης

Θεωρούμε την ομοιόμορφη διακριτή κατανομή. Έστω τ.μ X με τιμές $x_1, \dots, x_n$ και $P_X(x_i) = \frac{1}{n}$ $i = 1, \dots, n$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p_X(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \frac{1}{n} = \frac{(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2 + \dots + (x_n-\mu)^2}{n}$$

Παρατήρηση

1) Το τετράγωνο ορίστηκε ώστε η διακύμανση να είναι θετική

2) Θα μπορούσε να οριστεί η διακύμανση $Var(X) = E(|X-\mu|)$ αλλά η απόλυτη τιμή είναι δύσχρηστη.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν X μια τ.μ τότε $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

~~Απόδειξη~~

$$Var(X) \stackrel{op}{=} E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 =$$

$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

*(Συνέχεια Παραδείγματος)

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{x=0}^{3} x^2 P_X(x) - 1{,}5^2 = 0{,}75$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \sum_{y=-3,-1,1,3} y^2 P_Y(y) - 0^2 = 3$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Διακύμανσης συνάρτησης τ.μ.

Αν X είναι τ.μ και $g(x)$ μια πραγματική συνάρτηση της X η $Var[g(x)]$ ορίζεται $Var[g(x)] = E(g(x))^2 - [E(g(x))]^2$

Ιδιότητες της διακύμανσης

Αν X μια τ.μ g μια πραγματική συνάρτηση και α μια σταθερά τότε:

i) $Var(\alpha) = 0$

ii) $Var[\alpha g(x) + b] = \alpha^2 Var[g(x)]$

ΟΡΙΣΜΟΣ Τυπικής Απόκλισης.

Αν X μια τ.μ η τυπική απόκλιση της X συμβολίζεται με σ και ορίζεται $\sigma = +\sqrt{Var(x)}$

Παράδειγμα

Κάλπη περιέχει 8 άσπρες 4 μαύρες και 2 κόκκινες μπάλες. Ένας παίκτης επιλέγει στην τύχη 2 μπάλες την μια μετά την άλλη με επανατοποθέτηση. Έστω ότι κερδίζει 2 αναψυκτικά για κάθε μαύρη μπάλα και χάνει 1 αναψυκτικό για κάθε άσπρη. Ούτε κερδίζει ούτε χάνει για κάθε κόκκινη. Ένα παιχνίδι χαρακτηρίζεται ως δίκαιο αν ο παίκτης δεν αναμένει ούτε κέρδος ούτε ζημιά. Είναι το παιχνίδι αυτό δίκαιο?

Να προσδιοριστεί η διακύμανση του κέρδους του παίκτη.

<u>Λύση</u>

Έστω X κέρδος θα είναι δίκαιο αν $E(X)=0$

$AA \to -2$

$AM \to 1 \to MA$

$AK \to -1 \to KA$

$MM \to 4$

$MK \to 2 \to KM$

$KK \to 0$

Τιμές X: $-2, -1, 0, 1, 2, 4$

$P_x(-2) = P(AA) = P(A)\cdot P(A) = \frac{8}{14}\cdot\frac{8}{14} = \frac{64}{196}$

$P_x(0) = P(KK) = \frac{2}{14}\cdot\frac{2}{14} = \frac{4}{196}$

$P_x(-1) = P(AK \text{ ή } KA) = 2\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{2}{14} = \frac{32}{196}$

$P_x(1) = P(AM \text{ ή } MA) = 2\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{4}{14} = \frac{64}{196}$

$P_x(2) = P(MK \text{ ή } KM) = 2\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{2}{14} = \frac{16}{196}$

$P_x(4) = P(MM) = \frac{4}{14}\cdot\frac{4}{14} = \frac{16}{196}$

Άρα $p_X(x) = \begin{cases} \frac{64}{196}, & x=-2 \\ \frac{32}{196}, & x=-1 \\ \frac{4}{196}, & x=0 \\ \frac{16}{196}, & x=2 \\ \frac{16}{196}, & x=4 \end{cases}$

$$E(X) = \sum_{x=-2,-1,0,1,2,4} x\, p_X(x) = 0$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{x=-2,-1,0,1,2,4} x^2 p_X(x) - 0^2 = 3,4286$$